ISUPFERE - Mathématiques - 45 minutes
22 novembre 2014

EXERCICE 1

Dans un repère orthonormé, on désigne par C_1 la courbe de la fonction f_1 définie par :

$f_1(x) = x + e^{-x}$

a/ vérifier que C_1 passe par le point Ade coordonnées (0,1)

b/étudier les variations de f_1

c/ on désigne par C_n la courbe de la fonction f_n définie par : $f_n(x) = x + e^{-nx}$

Tracer "à la main" quelques courbes C_n (par exemple 1,2,3,15)

Qu'observez vous ?

d/ Donner l'équation de l'asymptote "oblique" quand x tend vers l'infini (étudier par exemple $f_1(x) - (ax+b)$

e/On note $I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx})dx$

Démontrer que pour tout entier naturel n >1 : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x}(1 - e^{-x})dx$

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$. Qu'en déduire pour l'aire entre les courbes C_n quand n tend vers l'infini ?

EXERCICE 2

On considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles isocèles rectangles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA]. On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

1 - Représenter graphiquement les points A, B, C, D, E, F, G. Donner les coordonnées de tous ces points dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

2 - Donner l'expression du vecteur $\overrightarrow{DF}$

3 - On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF). Représenter graphiquement ce plan (nouveau dessin de préférence). On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF). Le faire figurer sur votre dessin.

4 – Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ (on rappelle que le produit scalaire de 2 vecteurs orthogonaux est nul). Donner la relation vectorielle qui exprime qu'un point M appartient à la droite DF. Calculer les coordonnées du point H intersection du plan et de la droite DF. Vérifier sa position sur le dessin réalisé.

ISUPFERE - Mathématiques - 45 minutes
22 novembre 2014
Corrigé

EXERCICE 1 -

Dans un repère orthonormé, on désigne par C_1 la courbe de la fonction f_1 définie par :

$f_1(x) = x + e^{-x}$

a/ $f_1(0) = 0 + e^{-0} = 1$

b/étudier les variations de f_1

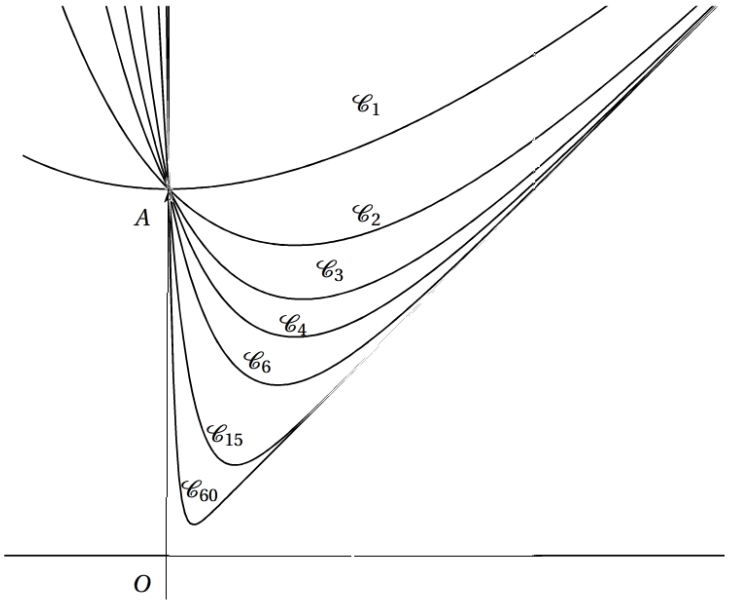
Limite de f_1 en $+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} x+e^{-x} = +\infty$
Limitede f_1 en $-\infty$: on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = x + e^{-x} = \frac{xe^x+1}{e^x}$

or d'après le cours, $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ donc $\lim_{x\to-\infty} xe^x + 1 = 1$ et comme $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ alors $\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$

Etudions les variations de f_1 : f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et on a $f_1'(x) = 1 - e^{-x}$. De plus $f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et on peut dresser le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1		↘	1	↗	

c/ on désigne par C_n la courbe de la fonction f_n définie par : $f_n(x) = x + e^{-nx}$



On distingue une asymptote oblique et on remarque que les courbes se resserrent au fur à mesure

d/On recherche la limite de quand x tend vers l'infini de

$f_1(x) - (ax+b) = x + e^{-x} - (ax+b) = (1-a).x + e^{-x} - b$

Pour que (ax + b) soit une droite asymptote, cette limite doit tendre vers 0. Il faut donc que 1-a soit nul (a = 1) et b aussi. La droite est donc : y = x

e/On note $I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx})dx$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \left(x + e^{-(n+1)x}\right)dx - \int_0^1 (x + e^{-nx})dx = \int_0^1 \left(e^{-(n+1)x} - e^{-nx}\right)dx$

$$= \int_0^1 e^{-(n+1)x}\left(1 - e^{-nx}e^{(n+1)x}\right)dx = \int_0^1 e^{-(n+1)x}(1 - e^x)dx$$

Du coup, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; 1]$, $e^{-(n+1)x} > 0$ et que :

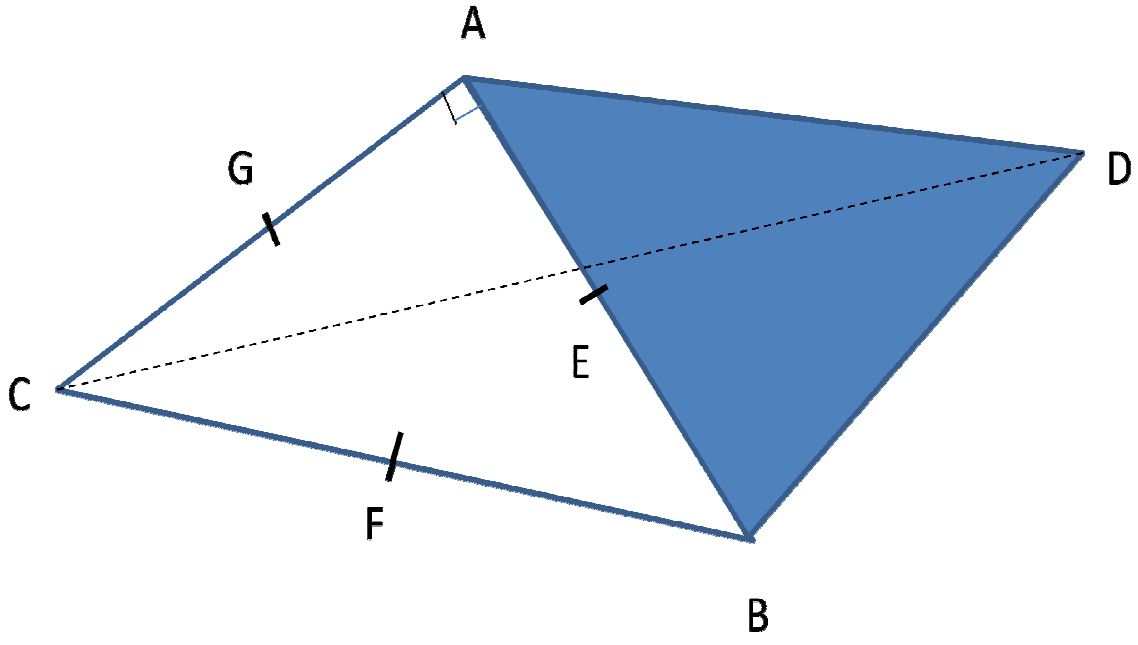
$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq e^x \leq e$$

$$\Longrightarrow \quad 1 - e^x \leq 0$$

Alors $\int_0^1 e^{-(n+1)x}(1 - e^x)dx \leq 0$ comme intégrale aux bornes bien rangées d'une fonction négative.

EXERCICE 2

Le tétraèdre est représenté ci dessous



Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ les coordonnées des points sont :

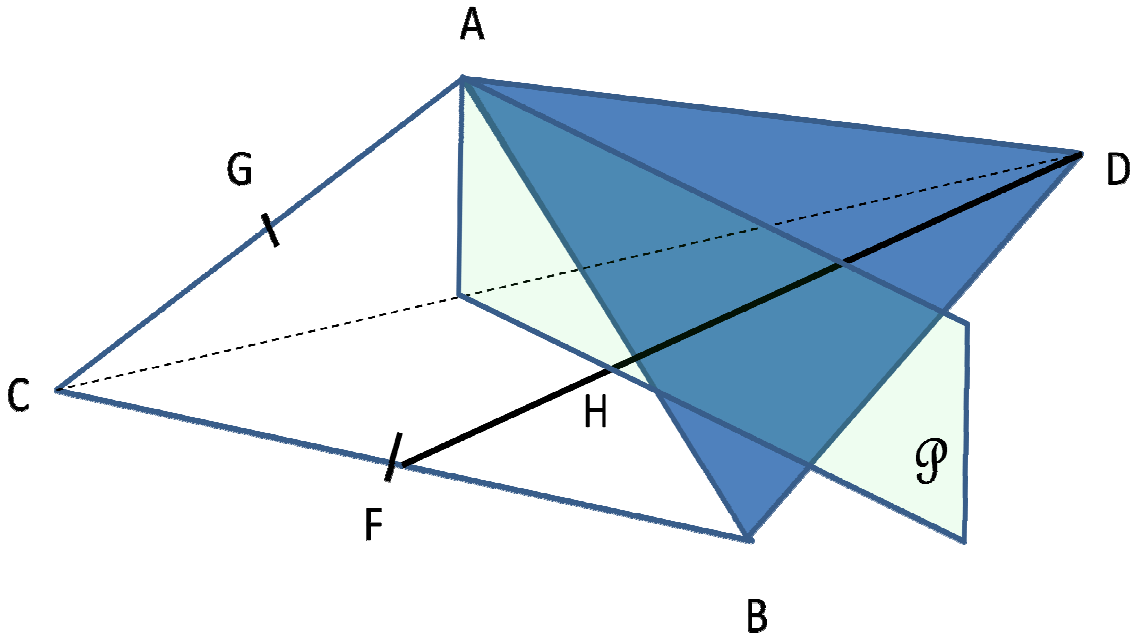
A (0,0,0) B (1,0,0) C (0,1,0) D (0,0,1)

E($\frac{1}{2}$,0,0) F($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$,0) G(0, $\frac{1}{2}$,0)

2 - Expression de $\overrightarrow{DF}$

$$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 \\ \frac{1}{2} - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

3 - Le plan perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et passant par A est tel que pour tous ses points M (x,y,z) le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DF}$. Donc le produit scalaire : $\overrightarrow{AM}$. $\overrightarrow{DF}$=0



$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z = 0$ ou x+ y - 2z = 0

4 - Le point H appartient au plan et à la droite DF alors $\overrightarrow{DH}$ = α. $\overrightarrow{DF}$

$$\overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 \\ \frac{1}{2} - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} \\ -\alpha \end{pmatrix} \text{ donc H} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} + 0 \\ \frac{\alpha}{2} + 0 \\ -\alpha + 1 \end{pmatrix}$$

On remplace ce point H dans l'équation du plan $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} - 2(1 - \alpha) = 0$ soit $\alpha = \frac{2}{3}$

Finalement $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$