

**ISUPFERE : EXAMEN DE MATHÉMATIQUES (durée 1 h)**  
**Novembre 2010**

**Exercice 1**

Soit  $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$ .

1. Calculer la dérivée de la fonction  $g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ .
  2. En déduire la dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $[0; 1]$  par  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$ .
- On rappelle que la dérivée de  $\ln(u)$  est égale à  $\frac{u'}{u}$
3. Calculer  $I$ .

**Exercice 2 - Cryptage affine**

Le cryptage affine consiste à chiffrer chaque lettre de l'alphabet (26 lettres), puis à remplacer le nombre  $x$  ainsi associé à une lettre par le nombre  $y$  tel que  $y = ax + b \pmod{26}$  et  $0 \leq y \leq 25$  avec  $a$  et  $b$  entiers naturels.

*Exemple* : à chaque lettre on associe son rang  $x$  et on choisit  **$a = 3$  et  $b = 5$** .

En clair	A	B	C	D
Rang $x$	0	1	2	
Rang $y$	5	8	11	
crypté	F	I	L	etc ...

- a) Dans le cryptage affine défini par  $y = 19x + 3 \pmod{26}$  et  $0 \leq y \leq 25$ , on veut décrypter la lettre P de rang  $y = 15$ . Démontrer que la lettre de rang  $x$  qui lui correspond en clair vérifie l'équation en nombres entiers,  $26k - 19x = 14$  avec  $0 \leq x \leq 25$ .
- b) En remarquant que le couple  $(k ; x) = (2 ; 2)$  est solution, déterminer la lettre qui est cryptée par P.

**Exercice 3**

On veut mesurer la hauteur d'un château. Celui-ci est protégé par un large fossé.  
On lit d'abord l'angle  $\alpha$  entre le sol et la pointe de la tour au bord du fossé qui vaut  $42^\circ$ .  
On recule de 10 m, l'angle  $\beta$  vaut alors  $27^\circ$ .

Donner une valeur approchée de la hauteur du château.

**Exercice 4**

a/ Montrer que la fonction  $f(x) = \cos ax$  avec  $a$  réel différent de 0 est périodique de période  $T = 2\pi/a$ .

b/ Etudier, suivant les valeurs de  $a$ , les variations de la fonction  $f$  sur  $[0, T]$

c/ Tracer la fonction  $f(x) = \cos\left(-\frac{1}{2}x\right)$  sur  $[0, T]$