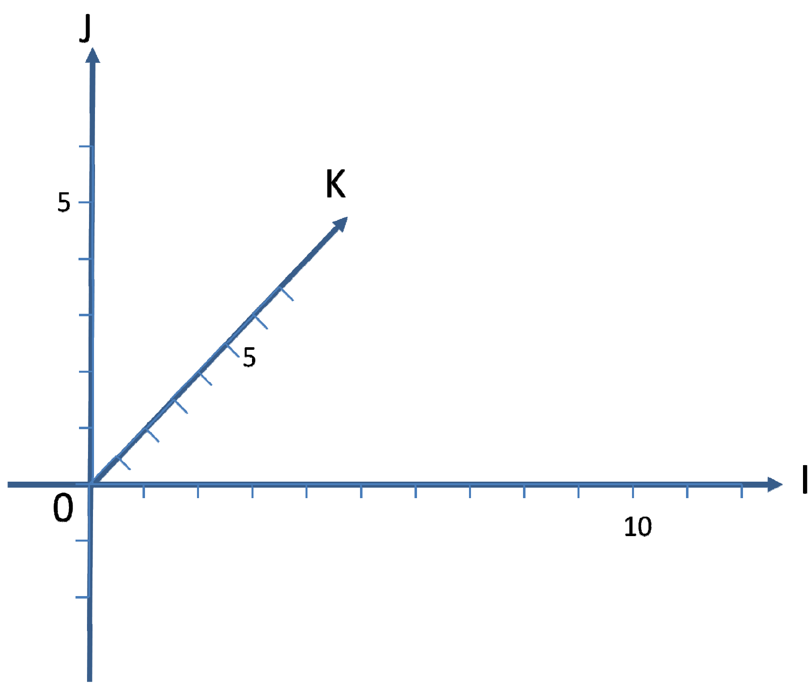
ISUPFERE - Mathématiques - 45 minutes
28 novembre 2015

EXERCICE 1

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points :

A(0 ;- 1;5), B(2 ;-1;5), C(11 ;0;1), D(11 ;4;4)

1. Représenter graphiquement (feuille jointe) les points A, B, C, D et les droites (AB) et (CD)



Le point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde. N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde. À l'instant t = 0, le point M est en A et le point N est en C.

On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes (t réel positif). On admettra que M_t et N_t ont pour coordonnées : M_t (t ;-1;5) et N_t (11;0,8t ;1+0,6t)

2. Représenter graphiquement les points M_t et N_t pour t = 5 s
3. La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ? Le démontrer en calculant le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.
4. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathscr{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathscr{P}$.

5. Vérifier que le point E (11 ;-1;5) appartient à la droite (AB) et au plan $\mathscr{P}$. Placer ce point sur le graphique.
6. Les droites (AB) et (CD) se coupent t-elles ?
7. On note M_tN_t la longuer de segment (norme euclidienne). Montrer que

   $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138$

8. À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par :

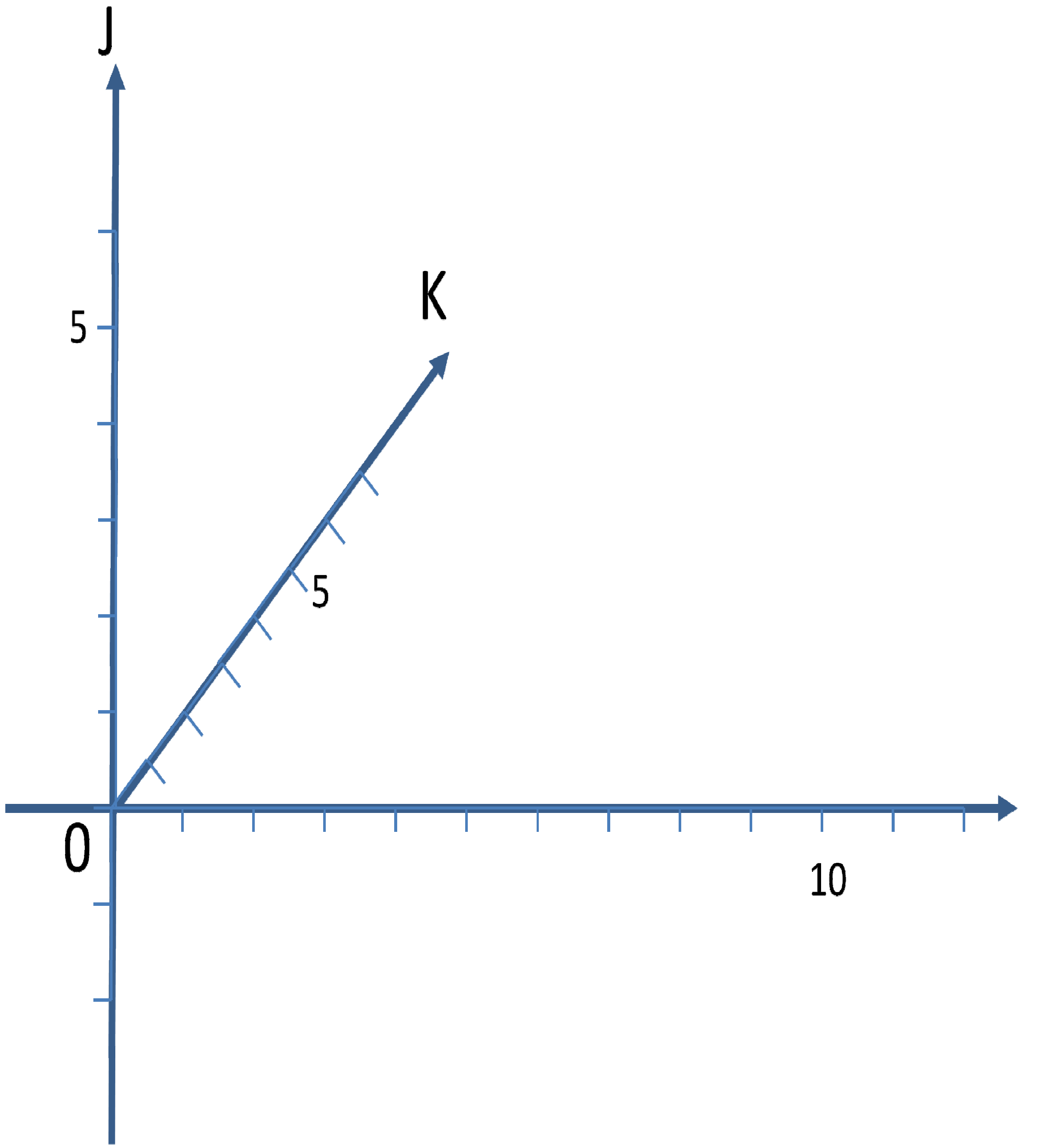
$f(x) = (x+1).\ln(x+1) - 3x + 7$ (ln est le logarithme népérien)

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f

1. Donner le domaine de définition de la fonction. Calculer sa dérivée
2. Déterminer la limite de $h(x) = x.\ln(x)$ lorsque x tend vers 0. Pour cela on exprimera $h(x^2)$ en fonction de h(x)
3. En considérant que (x+1)ln(x+1) tend vers 0 lorsque x tend vers -1, quelle est la limite f(x) lorsque x tend vers -1.En déduire le tableau de variation et tracer la courbe.
4. On admet que la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

a pour dérivée la fonction $g'(x) = (x+1).\ln(x+1)$

Déterminer une primitive de la fonction f



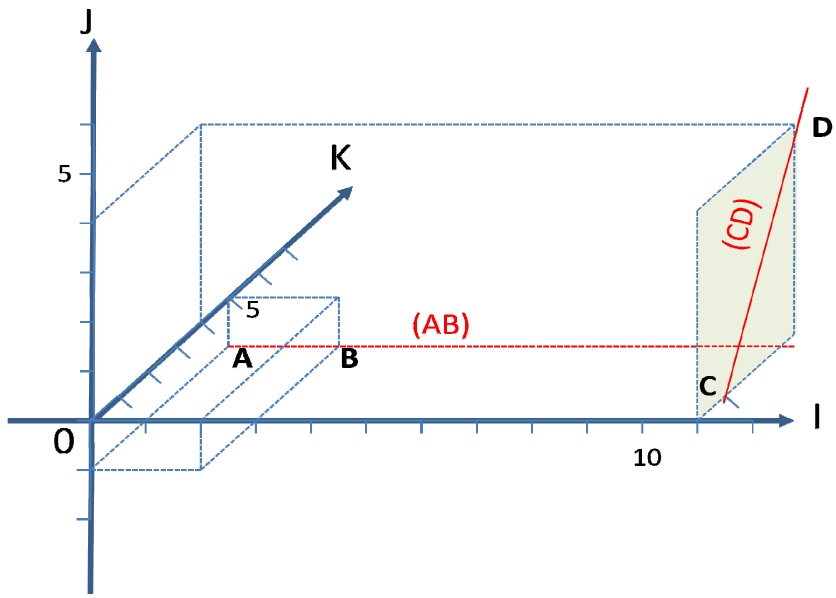
J
5
K
5
I
0
10

ISUPFERE - Mathématiques
28 novembre 2015

Corrigé

EXERCICE 1

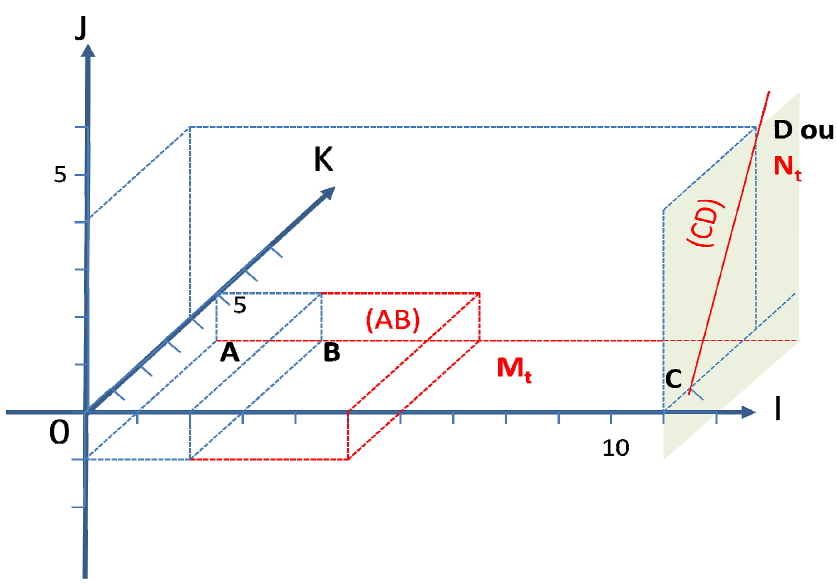
1. Représenter graphiquement (feuille jointe) les points A, B, C, D et les droites (AB) et (CD)



2. Représenter graphiquement les points M_t et N_t pour t = 5 s

M_t (5 ;-1;5) et N_t (11;4 ;4)

Le point N_t se trouve en D



3. La droite (AB) est clairement parallèle à l'axe OI.

On calcule le vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2-0} \\ \mathbf{-1+1} \\ \mathbf{5-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ qui est bien colinéaire au vecteur OI

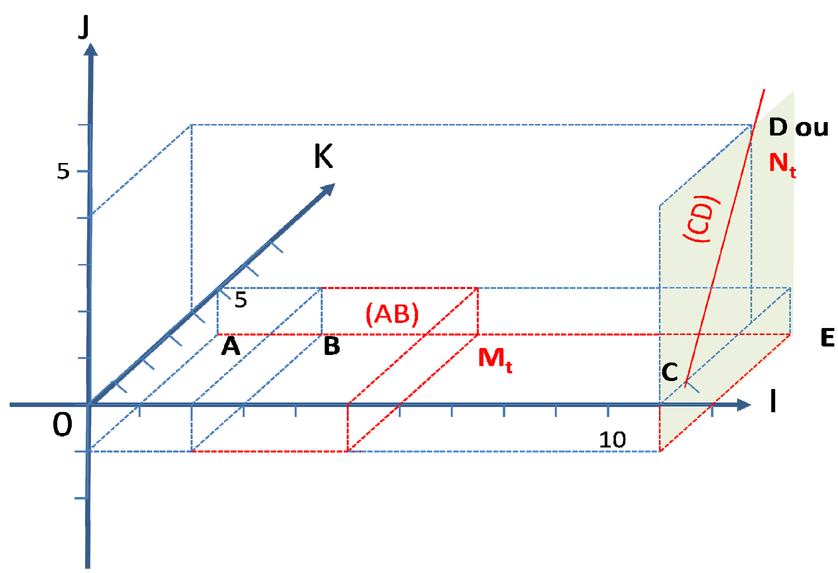
4. Le plan contenant (CD) est clairement perpendiculaire à l'axe OI. Pour le vérifier, on calcule le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} 11-11 \\ 4-0 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathscr{P}$ parallèle à OJK puisque la composante suivant OI est nulle.

Une équation de ce plan est donc de la forme : $x + \alpha = 0$

Pour que ce plan d'équation $x + \alpha = 0$ passe par C, il faut que $11 + \alpha = 0$ c'est à dire $\alpha = -11$. Donc l'équation du plan est $x - 11 = 0$.

5. Vérifier que le point E (11 ;-1; 5) appartient à la droite (AB) et au plan $\mathscr{P}$.



On calcule $\overrightarrow{\boldsymbol{AE}} = \begin{pmatrix} \mathbf{11} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\boldsymbol{AE}}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ sont colinéaires ce qui ,prouve que A, E et B sont sur une même droite (AB).

On vérifie que E appartient bien au plan : 11- 11 = 0. Il est donc le point d'intersection de (AB) et $\mathscr{P}$

6. Les droites (AB) et (CD) se coupent t-elles ?

Si elles se coupent, compte tenu de ce qui précède, c'est obligatoirement en E.

Or $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 11-11 \\ -1-0 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. On remarque que $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires et donc que E n'appartient pas à la droite (CD).

7. Montrer que . $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138$

$M_tN_t^2 = (x_{Nt} - x_{Mt})^2 + (y_{Nt} - y_{Mt})^2 + (z_{Nt} - z_{Mt})^2$

$M_tN_t^2 = (11 - t)^2 + (0{,}8t + 1)^2 + (1 + 0{,}6t - 5) = 2t^2 - 25{,}2t + 138$

Cette distance est minimale lorsque la dérivée s'annule : 4t - 25,25 = 0 donc t = 25,2 / 4 ou encore t = 6,3 s

EXERCICE 2

1. Donner le domaine de définition de la fonction et calcul de la dérivée

Pour que ln(x+1) soit défini, il faut que x+1 soit positif donc la fonction est définie sur $]-1+\infty[$

f'(x) = $f(x) = 1 \text{ x} \ln(\text{x}+1) + (\text{x} + 1)\frac{1}{\text{x}+1} - 3 = \ln(\text{x}+1) - 2$

2. Déterminer la limite de h(x) = x.ln(x) lorsque x tend vers 0

h(x) a une limite *b* lorsque x tend vers 0

$$h(x^2) = x^2 \ln x^2 = 2\, x \times x \ln x = 2\, x\, h(x)$$

Lorsque x tend vers 0, x^2 tend vers 0 et $f(x^2)$ tend vers b, $f(x)$ tend aussi vers b

donc $b = 0 \times b = 0$.

la limite est donc nulle

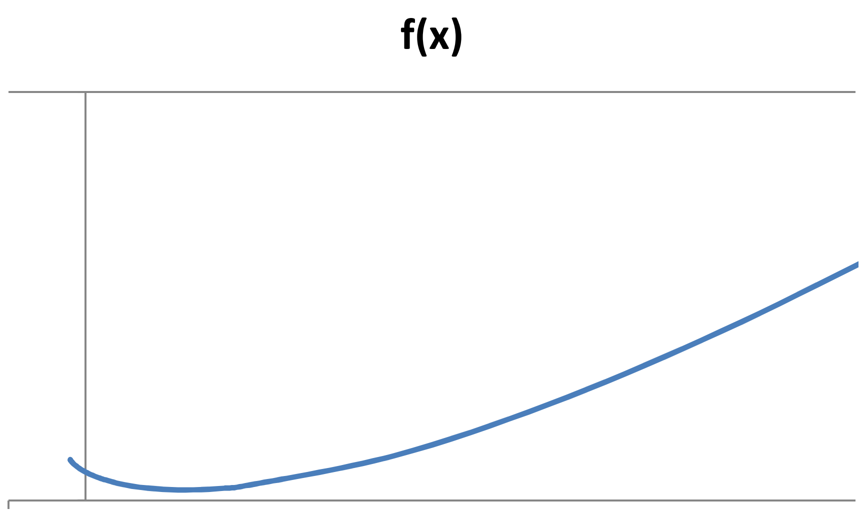
3. Limite f(x) lorsque x tend vers -1. Tableau de variation et tracé

Lorsque x tend vers -1, (x+1)ln (x+1) tend vers 0. La limite est donc celle de -3x + 7 qui tend vers 3+7 = 10

f''(x) s'annule pour $\ln(x+1) = 2$ Soit $x = e^2$-1

D'où le tableau de variation

x	-1	e^2-1	+∞
f'(x)	-	+	
f(x)	10 ↘	$f(e^2$-1) ↗	+∞



$$f(e^2-1) = -e^2+10$$

4. Primitive de f(x)

f(x) = g'(x) - 3x + 7

donc F(x) = g(x) - $3x^2$/2 + 7x = $\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{7}{4}x^2 + \frac{13}{2}x$